ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ / PEDAGOGICAL SCIENCES

УДК: 378.14:[517.9:518.5]
DOI: 10.24411/2412-1657-2018-10012

ОБУЧЕНИЕ МАГИСТРОВ-МЕХАНИКОВ: ВЫБОР МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ МНОГОМАССОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

С. В. Окишев

В статье рассматриваются проблемы подготовки магистров по механическим специальностям. Часто исследования магистров-механиков связаны с изучением динамики механических устройств. Для моделирования динамических процессов в подобных устройствах традиционно используются многомассовые механические модели. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка описывают динамические процессы, происходящие в подобных моделях. Эта статья предлагает несколько идей выбора численного метода для интегрирования таких систем. Выбор метода интегрирования систем дифференциальных уравнений должен осуществляться на базе предварительных вычислительных экспериментов. Сами эксперименты должны проводиться на близком аналоге модели, подлежащей дальнейшему использованию в основном исследовании.

Ключевые слова: *магистр, обучение, модель, динамические процессы, система дифференциальных уравнений, численный метод, сравнение, выбор, исследователь.*

Проблемы в подготовке магистров

Система подготовки магистров по механическим специальностям предполагает двухгодичное совершенствование знаний бакалавров в вопросах прикладных исследований механических систем. При этом важное внимание уделяется изучению способов построения математических моделей; методам исследования моделей, как абстрактно-математическим, так и численным; современному программному обеспечению, реализующему численные методы. В то же время сохраняются и негативные тенденции в обучении: следование шаблонным схемам и методам; бездумная работа с программным обеспечением; непонимание особенностей устройства тех математических объектов, которые используются в исследованиях.

Автору статьи много лет приходилось работать со студентами-старшекурсниками, соответствующими современным магистрам, а также общаться с аспирантами разного уровня подготовки. Общение это происходило в рамках курсов по математическому моделированию и численным методам, причем были предложены различные технологии обучения [8]. Работа по технологии студенческого конструкторского бюро, при которой создавались компьютерные программные продукты с графическим интерфейсом [7],

[*] *Окишев Сергей Владимирович* — к.т.н., доцент кафедры «Высшая математика», Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, okishev59@mail.ru

была максимально приближена к исследовательской работе магистров. Далее разработанное программное обеспечение использовалось при альтернативных технологиях построения учебного процесса. Изучение студентами численных методов и особенно — лабораторные работы показывали недостаточную подготовку их по базовым математическим понятиям, которую они тщетно пытались компенсировать навыками работы на компьютере. Предположим, что для численного решения студентами сформулирована задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ДУ), не удовлетворяющая теореме существования и единственности решения. Пусть также начальному условию соответствует не только основное решение, но и решение-константа. Известна (получена аналитически) формула основного решения. Запуская численный метод с графической иллюстрацией процесса, студенты получают горизонтальную линию, не соответствующую аналитической формуле. Единственное, до чего они могут обычно «додуматься» — это то, что им подсунули «негодную» программу. А между тем, эта же программа уже решила им правильно несколько задач Коши для других уравнений. Никаких попыток исследовать саму математическую модель у обучаемых не наблюдается.

Другой пример. Пусть правая часть исходного ДУ содержит показательную функцию. Как известно, такая функция реализуется на компьютере комбинированным использованием экспоненты и логарифма. Запуская численный метод, студенты некоторое время наблюдают построение интегральной кривой, как вдруг процесс обрывается задолго до достижения правой границы отрезка интегрирования. Каков вывод исследователей? Разумеется, плохо отлаженная программа и «дурные» программисты, ее создавшие! На самом же деле аргумент в некоторый момент стал отрицательным, и «компьютерное» взятие логарифма оказалось невозможным. В то же время в аналитической формуле все остается корректным. Здесь уже наблюдается пробелы в подготовке студентов по основам информатики.

Даже когда студентам специально ставилась задача исследовать некоторую конкретную программу численного интегрирования ДУ, то они вовсе не исследовали, насколько хорошо работает данный численный метод для разных по типу задач. В их понимании исследование программы — это лишь «проверка на дурака», то есть проверка того, как отреагирует программа на ввод заведомо неверных символов. Именно такому контролю их обучили на информатике. Таким образом, даже попытки численного решения простейших задач демонстрирует неподготовленность бывших бакалавров к исследовательской работе.

Магистрам же приходится решать гораздо более сложные математические задачи. Магистры и аспиранты, как правило, решают нестандартные по постановке задачи моделирования и успех их работы зависит от умения выбрать качественный в смысле результата работы и выигрышный в смысле презентации на защите метод исследования такой задачи. Вот тут мы и перейдем к описанию распространенного способа исследования задач динамики механических систем и сопутствующих этому способу проблем.

Численные методы интегрирования систем ДУ

При исследовании сложных механических систем (механических и гидромеханических передач, систем подвески экипажей, виброзащитных устройств, групп вагонов, соединенных автосцепками и так далее) применяются *многомассовые механические модели* с упругими и вязко-упругими связями. Динамические процессы в таких моделях описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений *второго порядка*, получаемыми обычно по методу Лагранжа второго рода из выражений для потенциальной и кинетической энергий и диссипативной функции модели. Нелинейность и большое количество уравнений в таких системах обычно преодолеваются численным решением систем на компьютерах.

Среди методов численного интегрирования дифференциальных уравнений наибольшее развитие получили методы решения систем дифференциальных уравнений *первого порядка*, что приводило обычно исследователя к преобразованию системы уравнений второго порядка в систему уравнений первого порядка. Это производилось введением новых переменных-скоростей и увеличением числа уравнений в системе вдвое. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка можно разделить на две группы: *одношаговые и многошаговые* методы.

Суть *одношаговых методов* состоит в использовании информации лишь об одном предыдущем шаге-состоянии процесса. На основе этой информации пытаются построить наиболее точную аппроксимацию неизвестной траектории, применяя порой очень сложные конструкции. Популярными считаются методы *Рунге-Кутты*, среди которых *четырехточечный метод* получил наибольшую известность из-за достаточной точности, теоретический порядок которой к тому же не возрастает при добавлении пятой расчетной точки. В данной статье этот численный метод будет одним из примеров для сравнения. Использование одношаговых методов характерно для исследователей-инженеров, не имеющих хорошей математической подготовки. Расчетные методы для своих работ они получали «по наследству» от предыдущих поколений инженеров.

Суть *многошаговых методов* состоит в использовании информации о нескольких предыдущих шагах-состояниях процесса. На основе информации строится сначала приближенная формула-прогноз, а затем результаты уточняются итерационно (в цикле) с помощью формулы-коррекции. Поэтому альтернативное название этой группы численных методов — «методы прогноза и коррекции». Популярными в этой группе являются: метод Милна, метод Адамса, метод Хемминга. Использование многошаговых методов характерно для выпускников технических университетов, имевших серьезную подготовку по программированию и численным методам. Эти исследователи всегда отстаивают преимущества методов прогноза и коррекции, позволяющих им продемонстрировать свои знания, но имеющих, в целом, не очень большое превосходство над одношаговыми методами. Происходит это за счет более громоздких алгоритмов и итерационных процедур, заложенных в многошаговых методах и нивелирующих их преимущества перед одношаговыми методами.

Эксперимент по выбору численного метода

Автор статьи, однако, убежден, что численный метод решения практической задачи следует выбирать не «по наследству» и не «потому что так учили», а на основе структуры самой задачи и сравнительного эксперимента среди методов, соответствующих этой структуре. Многомассовые динамические модели имеют в своей основе второй закон Ньютона и описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Следовательно, алгоритмы интегрирования естественно выбирать среди *методов для систем уравнений второго порядка*. Один из таких методов будет рассмотрен в данной статье в качестве примера для сравнения с методом Рунге-Кутты.

Численный эксперимент по выбору метода интегрирования желательно проводить на самой (используемой в рамках большого исследования) динамической модели устройства. Однако выбор численного метода происходит на начальном этапе работы, когда сама модель, как правило, еще не готова окончательно. В процессе исследования происходит параметрическая и структурная идентификация модели, модель может быть существенно усложнена введением дополнительных связей и элементов. Поэтому можно вести речь о подборе метода интегрирования уравнений модели *по некоторому близкому ее аналогу* (предварительной версии модели), либо о выборе метода *для целого класса* однотипных механических моделей.

Перейдем к описанию *конкретного примера* реализации предлагаемой методики. В начале 90-х годов XX века на кафедре «Теоретическая механика» нашего вуза велись работы по созданию динамических моделей приводов тепловозов, содержащих высокоэластичные муфты (ВЭМ). Основная идеология этих исследований изложена, например, в работе [3]. Сама ВЭМ с резинокордной торообразной оболочкой являлась одним из элементов системы двигатель-муфта-трансмиссия и заменялась многомассовой моделью с вязко-упругими связями между отдельными массами, а также между фланцем и ближайшей к нему массой [1].

Дискретная N-массовая модель имела упруго-диссипативные связи, расположенные в меридиональном (рис. 1) и окружном (рис. 2) направлениях.

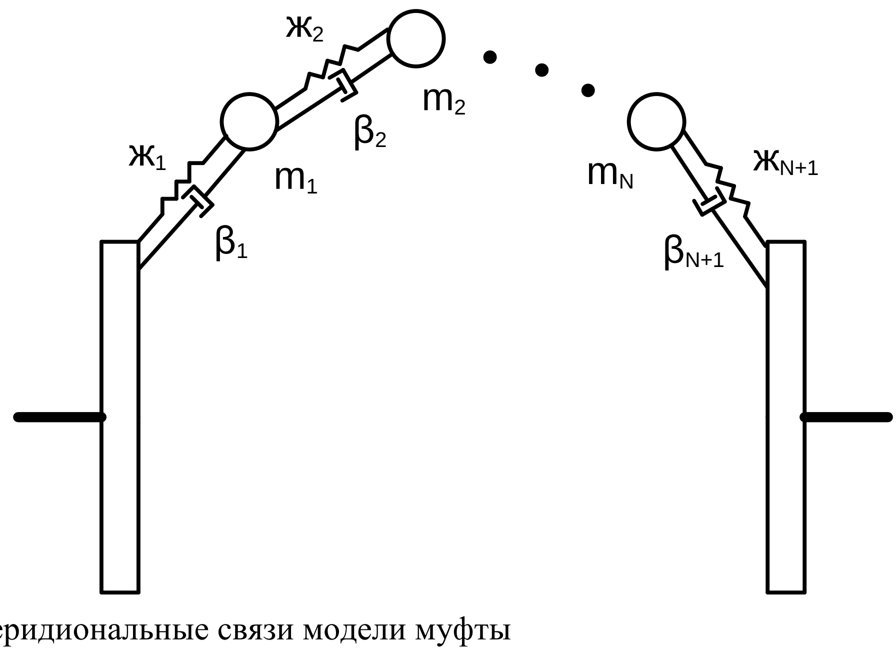

Рис. 1. Меридиональные связи модели муфты
Источник: составлено автором по работе [1].

Для модели использовалась цилиндрическая система координат вдоль оси вращения ведущего фланца муфты. Ведомый фланец в модели муфты мог перемещаться вдоль оси вращения и в перпендикулярной этой оси плоскости, а также отклоняться на некоторый угол. В модели имелось $4 \times (N+1)$ характеристик связи между дискретными массами: $ж_i$ — меридиональные жесткости, c_i — окружные жесткости, β_i — меридиональные демпфирования, b_i — окружные демпфирования.

Количество дискретных масс N выбиралось нечетным, и не должно было быть слишком большим. Именно на основе этой *предварительной модели* производился выбор численного метода для последующих расчетов динамики муфты.

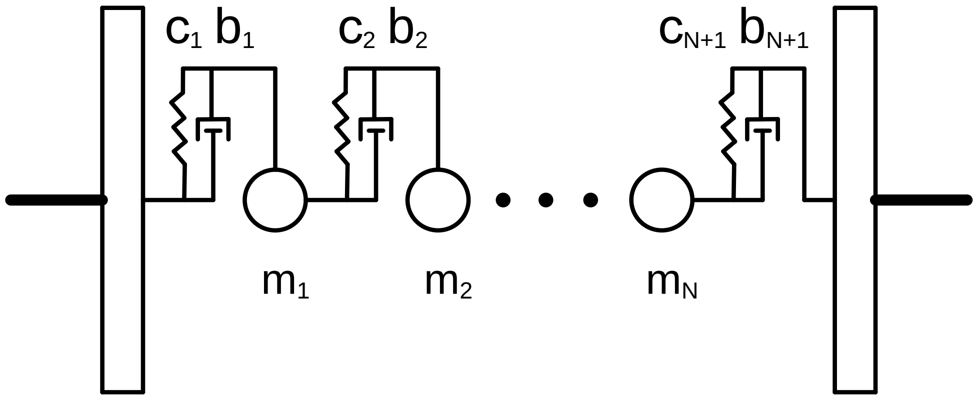

Рис. 2. Окружные связи модели муфты
Источник: составлено автором по работе [1].

Следует заметить, что *окончательная модель муфты* [5, 6] заметно отличалась от исходной. На основе методики, предложенной в [2], было обнаружено, что в модели не учитывается изгиб оболочки, и в статике она «не держит» форму. Коррекция модели была проведена введением в каждую массу «встроенного» упругого шарнира, контролирующего изгиб меридиана оболочки. Кроме того, параметры, описывающие механические связи модели, стали переменными, зависящими от температуры оболочки, рассчитываемой в модели теплового баланса. Основа модели, тем не менее, сохранилась в рамках схем, изображенных на рис. 1 и 2. Характер дифференциальных уравнений также не претерпел существенных изменений. Это позволяет сделать вывод о достаточной адекватности выбора численного метода интегрирования на основе предварительной модели динамики.

При подборе численного метода для системы дифференциальных уравнений (СДУ) динамики ВЭМ, в частности, сравнивались четырехточечный метод Рунге-Кутты для систем первого порядка и итерационный метод для систем второго порядка. Тезисно результаты сравнения приведены в работе [4]. Малый объем тезисов [4] не позволил подробно описать характер и этапы численного эксперимента по выбору метода интегрирования СДУ. Сделаем подробное описание проведенного численного эксперимента.

Исходную СДУ второго порядка многомассовой модели можно представить в виде (1), а большинство численных методов разработаны для СДУ (2):

$$\ddot{Y} = G(t, Y, \dot{Y}), \quad \text{где } Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, G \in R^s; \tag{1}$$

$$\dot{Y} = F(t, Y), \quad \text{где } Y, \dot{Y}, F \in R^{2s}. \tag{2}$$

Обычно производят преобразование системы (1) к системе (2) введением новых дополнительных переменных, заменяющих первые производные:

$$W = \dot{Y} \in R^s. \tag{3}$$

Тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{Y} = W; \\ \dot{W} = G(t, Y, W). \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) содержит $2s$ дифференциальных уравнений, и имеет вид, эквивалентный (2). Можно, тем не менее, не преобразовывать систему (1) к виду (4), а применять численные методы для СДУ второго порядка, что автор статьи считает предпочтительным. В этом случае не требуется выполнять громоздких аналитических преобразований СДУ в новую форму, а сама математическая модель ближе к описываемым физическим законам.

Опишем кратко сравниваемые численные методы. *Явный метод Рунге-Кутты по четырем точкам* предназначен для решения задачи Коши вида (5) и имеет погрешность $\overline{O}(h^5)$, где h — шаг интегрирования.

$$\begin{cases} \dot{Y} = F(t, Y); \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{5}$$

Новое значение искомой вектор-функции Y получается из старого добавлением поправки, вычисляемой по четырем точкам:

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ K_1 = F(t_n, Y_n); \\ K_2 = F(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1); \\ K_3 = F(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2); \\ K_4 = F(t_n + h,\ Y_n + hK_3). \end{cases} \tag{6}$$

Итерационный метод для СДУ второго порядка предназначен для решения задачи Коши вида (7) и имеет погрешность $\overline{O}(h^5)$ при оптимальных значениях параметров α и θ, то есть теоретический порядок точности двух сравниваемых методов одинаков.

$$\begin{cases} \ddot{Y} = G(t, Y, \dot{Y}); \\ Y(t_0) = Y_0; \\ \dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0. \end{cases} \tag{7}$$

Вычислительные процедуры метода задаются формулами (8) и (9):

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h\dot{Y}_n + \frac{h^2}{2}\left[\alpha\,\ddot{Y}_{n+1} + (1-\alpha)\,\ddot{Y}_n\right]; \\ \dot{Y}_{n+1} = \dot{Y}_n + h\left[\theta\,\ddot{Y}_{n+1} + (1-\theta)\,\ddot{Y}_n\right]. \end{cases} \tag{8}$$

$$\ddot{Y}_n = G(t_n, Y_n, \dot{Y}_n). \tag{9}$$

Формулы (8) для вычисления новых значений Y и $\dot{Y}$ имеют неявный характер, так как зависят от $\ddot{Y}_{n+1}$. Вычисления по формулам (8) производятся итерационно. На первой итерации вместо значения $\ddot{Y}_{n+1}$ подставляется $\ddot{Y}_n$, затем вычисляется $\ddot{Y}_{n+1}$ по формуле (9). Последующие итерации уточняют значение $\ddot{Y}_{n+1}$. Число итераций уточнения может быть различным. Оптимальные значения вспомогательных параметров метода: $\alpha = \frac{1}{6}$, $\theta = \frac{1}{2}$. Созданные программы численных методов были одинаковы по структуре, отличаясь формулами.

На первом этапе сравнения методов оценивалось отклонение результатов численного интегрирования двумя методами и подбиралось оптимальное число итераций второго метода. Обозначим через $\bar{h}$ наибольший шаг интегрирования, при котором численно устойчив метод Рунге-Кутты. Сам метод Рунге-Кутты будем сокращенно обозначать МРК, а итерационный метод — ИМ. Сравнение методов выявило высокую точность интегрирования уравнений предложенной системы обоими методами. Увеличение числа итераций ИМ больше трех не приводило к сколь-нибудь существенному изменению результата интегрирования, поэтому 3 было взято в качестве оптимального числа итераций ИМ и зафиксировано при дальнейшем сравнении методов.

<u>На втором этапе</u> сравнения методов оценивалось время счета методов и подбирался наибольший шаг интегрирования, при котором устойчив ИМ. Этот шаг оказался примерно равным $\bar{h}\,/1.5$. Результаты сравнения методов приведены в таблице.

Таблица 1.

Результаты экспериментов по сравнению методов

Величина шага	Максимальное отклонение результатов численного интегрирования модели	Отношение процессорных времен двух методов: t (ИМ) / t (МРК)
$\bar{h}$	ИМ численно неустойчив	–
$\bar{h}\,/1.5$	$8\cdot10^{-5}$	0.709
$\bar{h}\,/2$	$5\cdot10^{-5}$	0.708
$\bar{h}\,/4$	$5\cdot10^{-6}$	0.698

Источник: составлено автором по данным численных экспериментов.

В результате численных экспериментов выяснилось, что МРК численно устойчив при несколько большем шаге интегрирования, чем ИМ. МРК требует для своей реализации примерно в два с половиной раза больше памяти, чем ИМ. При большой размерности СДУ это может оказаться существенным недостатком. Результаты численного интегрирования СДУ обоими методами совпадали до четвертого-пятого знака после запятой, что в расчетах динамики технических систем можно считать полным совпадением. Время счета ИМ оказалось примерно равным 0.7 от времени счета МРК при одинаковой величине шага интегрирования. Кроме того, не требуется преобразование СДУ вида (1) к СДУ вида (2), требующее ручной рутинной работы. Использование критического значения шага интегрирования $\bar{h}$ позволяет, казалось бы, проводить расчеты с помощью МРК несколько быстрее, чем с использованием ИМ, но уменьшение числа итераций ИМ с трех до двух сразу дает значительное преимущество в быстродействии ИМ, почти не снижая точности вычислений. В итоге проведенного сравнения ИМ оказывается предпочтительнее МРК при интегрировании СДУ динамики ВЭМ.

Таким образом, при исследовании динамики ВЭМ аспирантам кафедры «Теоретическая механика» удалось обоснованно отказаться от традиционного подхода к интегрированию СДУ механики и перейти к естественному виду дифференциальных уравнений, интегрируемых быстрее и с меньшими затратами памяти компьютера.

Итоговые выводы по предлагаемой методике

Предлагаемая методика обучения магистров и аспирантов выбору численного метода интегрирования систем ДУ, описывающих динамику механических устройств, состоит в следующем.

1). Исследовать поведение численных методов и сравнивать их между собой по эффективности необходимо на механических моделях того же класса, который затем будет применяться в основном научном исследовании. Допустимо проводить исследование на моделях-аналогах или предварительных версиях будущих моделей.

2). Следует переходить от методов интегрирования СДУ первого порядка к методам интегрирования СДУ второго порядка, как более естественным для динамических моделей.

3). Сравнивать методы следует по точности, практическому быстродействию и затрачиваемой памяти.

4). Следует избегать в серьезных исследованиях применения программных средств типа «черный ящик», в которых любые СДУ решаются с помощью одной и той же процедуры, суть которой остается недоступной исследователю.

5). В случае использования более развитых систем компьютерной математики (например, MATLAB), где методы уже рассортированы по сферам их применения и названы поименно, все равно необходимо сравнительное исследование предлагаемых процедур на моделях конкретных изучаемых механических систем. Следует также преобразовывать получаемые в таких системах аналитические формулы в традиционную математическую нотацию, избегая засорения текстов исследовательских работ компьютерными псевдо-математическими «жаргонизмами».

Заключение

В заключение отметим, что проблема численного решения систем дифференциальных уравнений является лишь одной из нескольких проблем, встающих перед магистрантами и аспирантами механических специальностей в ходе их творческой работы. Проблемами являются, например, оптимизация важнейших числовых характеристик разрабатываемых устройств, расчет устройств на прочность и надежность, экономическое обоснование эффективности внедрения разрабатываемых проектов.

Близкие по своей сущности к материалу данной статьи вопросы рассматриваются Лилией Сергеевной Петровой при обучении студентов (бакалавров и магистров) теплоэнергетических специальностей навыкам расчета процессов тепломассопереноса. В статье [9] перечисляются проблемы подготовки бакалавров: базовое математическое и информационное образование, знание теории уравнений математической физики и численных методов решения краевых задач для таких уравнений, умение применять программное обеспечение для решения стандартных задач теплопроводности. Магистрам же требуются умения решать нестандартные исследовательские задачи, например, задачи нестационарной теплопроводности для многослойных тел, описанные в работе [10]. При этом магистры должны проводить свои исследования, корректируя численные методы и создавая авторские программные реализации этих методов.

Литература

1. Галиев И. И. Математическое моделирование динамических свойств торообразной высокоэластичной муфты [Текст] / И. И. Галиев, В. Ф. Кузнецов, В. А. Нехаев, С. В. Окишев // Математическое моделирование и расчет узлов и устройств объектов железнодорожного транспорта: Межвузовский сборник научных трудов — Омск: ОмИИТ, 1990. — С.9–12.

2. Галиев И. И. Статическая проверка корректности динамических моделей с помощью ЭВМ [Текст] / И. И. Галиев, В. А. Нехаев, С. В. Окишев; Омский институт инженеров железнодорожного транспорта — Омск, 1991. — 7с. — Деп. в ЦНИИТЭИ МПС 12.12.1990, № 5405 — жд.

3. Галиев И. И., Нехаев В. А., Окишев С. В., Самохвалов Е. А. Формирование математической модели системы «двигатель-муфта-трансмиссия» для тепловоза // Повышение динамических качеств подвижного состава и поезда в условиях сибирского региона: Межвузовский сборник научных трудов — Омск: ОмГАПС, 1995. — С.66–71.

4. Окишев С. В. Сравнение двух численных методов интегрирования уравнений механики для динамических моделей // Тезисы докладов научно-практической конференции кафедр Омского института инженеров железнодорожного транспорта, посвященной 60-летию ОмИИТа — Омск: ОмИИТ, 1990. — С.30.

5. Окишев С. В. Совершенствование динамических качеств высокоэластичных муфт в приводах тепловозов: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.22.07. — Омск: Омский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1992.

6. Окишев С. В. Совершенствование динамических качеств высокоэластичных муфт в приводах тепловозов: дис. … канд. техн. наук: 05.22.07. — Омск: Омский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1992.

7. Окишев С. В. Применение инновационных методических приемов при организации компьютерных занятий по численным методам // Инновационная экономика и образование: особенности, достижения, перспективы: Сборник материалов четвертой Международной научно-практической конференции — Омск: ОмЭИ, 2007. — С.230–236.

8. Окишев С. В. Направления инновационной деятельности в преподавании численных методов для инженеров // Проблемы качества подготовки специалистов: Материалы научно-методической конференции — Омск: ОмГУПС, 2010. — С.50–51.

9. Петрова Л. С. Структурирование содержания обучения уравнениям математической физики студентов-теплоэнергетиков на уровнях бакалавриата и магистратуры // Образовательные технологии и общество — 2017. — Т.20. — №1. — С.473–484.

10. Петрова Л. С. Численные методы решения задач нестационарной теплопроводности для многослойных тел // Учебно-методическое пособие для выполнения самостоятельной работы по дисциплинам «Спецглавы математики» и «Дополнительные главы математического моделирования» — Омск: ОмГУПС, 2018.

TRAINING OF MASTERS-MECHANICS: THE CHOICE OF THE INTEGRATING METHOD FOR THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, DESCRIBING A MULTIMASS DINAMIC MODELS

Okishev S.V.
Ph. D. (Technical sciences),
Omsk state transport university, Omsk

In article problems of training of masters on mechanical specialties are considered. Often researches of masters-mechanics are connected with studying of dynamics of mechanical devices. For modeling of dynamic processes in similar devices multimass mechanical models are traditionally used. The systems of the ordinary differential equations of the second order describe the dynamic processes happening in similar models. This article offers several ideas of the choice of a numerical method for integration of such systems. The choice of a method of integration of systems of the differential equations has to be carried out on the basis of preliminary computing experiments. Experiments have to be made on a close analog of the model which is subject to further use in the main research.

Keywords: *master, training, model, dynamic processes, system of the differential equations, numerical method, comparison, choice, researcher.*